

# 饱和冻土水热耦合数值模拟与试验验证

李智明<sup>1,2</sup>, 陈剑<sup>1,2\*</sup>

- (1. 结构工程灾变与控制教育部重点实验室(哈尔滨工业大学), 哈尔滨 150090;
2. 土木工程智能防灾减灾工业和信息化部重点实验室(哈尔滨工业大学), 哈尔滨 150090)

## 摘要

冻融循环引起的破坏是季节冻土区渠道的主要病害, 其发生与温度梯度和水分迁移有密切的联系。为了研究冻融循环作用下土体温度变化与水分分布, 多场耦合理论应运而生。但目前存在的多场耦合模型大多采用了过多的参数, 其中的一些参数甚至难以确定。因此本文基于 Harlan 流体动力学模型, 以温度和孔隙率为变量建立了一个实用的多场耦合控制方程, 然后采用 COMSOL Multiphysics 中的数学模块中的系数型偏微分方程(PDE)对土体温度场和水分场进行模拟, 并与室内水分迁移试验进行对比, 证明了该耦合模型的有效性。最后以北部引嫩工程渠道为例, 建立模型试验, 所得试验结果与模拟结果也是十分接近。

**关键词:** 饱和冻土; 多场耦合; 冻融循环; 渠道; 模型试验

## 1 引言

水资源的短缺是中国面临的主要问题之一, 随着工农业的发展和人口的增长, 越来越多的水都使用在工农业和城市, 因此国家大力发展渠道工程来满足用水需求。然而一些渠道建设在季节冻土区, 而这些渠道或多或少的都受到冻融循环作用而产生破坏。冻融循环实际上是一个复杂的水热耦合过程: 一方面温度和水分之间相互影响互为耦合; 另一方面, 土体参数在不断的变化。

迄今为止, 对冻土冻胀的研究主要是采用多场耦合模型方法。根据未冻水动力理论, Harlan<sup>[1]</sup>首先推导了水热耦合方程, 随后许多学者基于他的理论提出了很多耦合方程<sup>[2-3]</sup>。另外一些学者致力于分凝冰形成条件的研究工作<sup>[4-6]</sup>。除此之外, 冻融循环作用下渠道的模型试验和数值模型也被学者们所研究<sup>[7-9]</sup>。从某种程度上来说, 这些试验和数值模拟结果可以作为季节冻土区渠道工程设计和维护的参考, 然而这些模型中有过多的参数需要确定, 故而在工程中得不到广泛的应用。因此, 本文基于 Harlan 的理论, 将孔隙率和温度视为变量来建立耦合方程, 和其它模型相比较, 它能够更方便的应用于工程中, 除此之外, 模型的所有的参数都实现了与温度和孔隙率的全耦合。为了验证提出的模型, 本文采用 COMSOL Multiphysics 中的数学模块实现温度场和水分场的数值模拟, 并与室内水分迁移试验进行对比, 证明该水热耦合模型的有效性。最后以北部引嫩工程渠道为例, 建立模型试验, 所得试验结果和模拟结果十分接近。

## 2 饱和冻土水热耦合控制方程

### 2.1 基本假定

土体的传热过程只考虑热传导, 忽略水分迁移引起的热量变化; 土颗粒和冰晶体均不可压缩; 水分的迁移满足达西渗透定律; 计算过程温度无损失。

### 2.2 温度场控制方程

基于傅里叶热传导定律和能量守恒原理, 考虑二维水热耦合问题, 并考虑相变热, 则其导热控制微分方程如下:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad}T) + L \rho_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (1)$$

式中： $C_p$  为等效容积热容量， $\lambda$  为导热系数， $L$  为冰水之间的相变潜热， $\theta_i$  为容积含冰量， $\rho$  是土体的容重， $\rho_i$  是冰的容重。

## 2.3 水分场控制方程

基于 Richard 方程，给出水分迁移控制方程如下：

$$\frac{\partial \theta_u}{\partial t} = \text{div}[D(\theta_u) \text{grad} \theta_u] + \frac{\partial k_y(\theta_u)}{\partial y} - \frac{\rho_i}{\rho_w} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (2)$$

式中： $D(\theta_u)$  是土体的水力扩散系数， $k_y(\theta_u)$  是重力加速度方向的土体渗透系数。

Taylor<sup>[10]</sup> 在确定水分扩散系数时，引入了一个阻抗因子  $I$ ，表示为孔隙冰对未冻水迁移的阻碍作用，给出了水力扩散系数的公式：

$$D(\theta_u) = \frac{k(\theta_u)}{C(\theta_u)} \cdot I \quad (3)$$

$$I = 10^{-10a} \quad (4)$$

式中： $k(\theta_u)$  为非饱和土的渗透率， $C(\theta_u)$  为比水容量。渗透系数参考 Gardner 模型，比水容量的取值参考 VG 模型。

## 2.4 耦合方程的建立

冻土中未冻水含量和温度保持着动态平衡关系，这里给出含冰率和温度之间的经验公式：

$$S_i = \begin{cases} 1 - [1 - (T - T_f)]^a, & T \leq T_f \\ 0, & T > T_f \end{cases} \quad (5)$$

式中： $T_f$  为冻结温度， $a$  为冻结系数。

对于饱和土体而言，由于土体内不存在气体，因此含水率和含冰率的和应该为 1，这里记含水率的表达式为  $S_w$ 。故体积含冰量和未冻水含量可由如下形式表达：

$$\theta_i = n \cdot S_i \quad \theta_u = n \cdot S_w \quad (6)$$

将方程（6）代入方程（1），可得以孔隙率为变量的温度场方程：

$$(\rho C_p - L \rho_i n \frac{\partial S_i}{\partial T}) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + L \rho_i S_i \frac{\partial n}{\partial t} \quad (7)$$

将方程（6）代入方程（2），可得以孔隙率为变量的水分场方程：

$$(S_w + \frac{\rho_i}{\rho_w} \cdot S_i) \frac{\partial n}{\partial t} - (1 - \frac{\rho_i}{\rho_w}) \frac{dS_i}{dT} \frac{dT}{dt} n = \text{div}(D \text{grad}(n S_w)) + \frac{\partial k_y(\theta_u)}{\partial y} \quad (8)$$

式（7）和式（8）联立即为以温度和孔隙率为变量的耦合方程。

对（7）（8）两式进行离散，取试探函数为  $v$ ，分别令  $v$  为  $v = \lambda \text{grad}(T)$  和  $v = D \text{grad}(\theta_u)$ ， $\Gamma$  为边界条件，根据 PDE 方程弱形式，可得：

$$\oint_{\Gamma} u \lambda (-\frac{\partial T}{\partial y} dx + \frac{\partial T}{\partial x} dy) + \iint_D (-v \text{grad} u + u L \rho_i S_i \frac{\partial n}{\partial t} + u (L \rho_i n \frac{\partial S_i}{\partial T} - \rho C_p) \frac{\partial T}{\partial t}) dx dy = 0 \quad (9)$$

$$\oint_{\Gamma} u D (-\frac{\partial n S_w}{\partial y} dx + \frac{\partial n S_w}{\partial x} dy) + \iint_D v \text{grad} u + u \frac{\partial k_y(\theta_u)}{\partial y} - u \frac{\rho_i}{\rho_w} \frac{\partial n S_i}{\partial t} - u \frac{\partial n S_w}{\partial t} dx dy = 0 \quad (10)$$

### 3 饱和冻土水热耦合数值模拟

#### 3.1 概述

本文采用 COMSOL Multiphysics<sup>[11]</sup>软件进行数值模拟，它是计算多场耦合的一款软件，每个参数之间可以相互关联、相互耦合，具有很强大的非线性求解功能，此外该软件内置的阶跃函数可以使分段函数在转折点附近变得光滑，使原函数具有更强的可导性。计算采用 COMSOL 中的系数型 PDE 模块，如图 1 所示，边界条件采用图 2 的狄利克雷边界条件。

<p>▼ 方程</p> <p>显示假设方程:</p> <p>研究 1, 瞬态</p> $e_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} + \gamma) + \beta \cdot \nabla \mathbf{u} + a \mathbf{u} = f$ <p><math>\mathbf{u} = [n, \tau]^T</math></p> <p><math>\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]</math></p>
--

图 1 系数型 PDE 方程

<p>▼ 方程</p> <p>显示假设方程:</p> <p>研究 1, 瞬态</p> <p><math>\mathbf{u} = r</math></p> <p><math>\mathbf{u} = [n, \tau]^T</math></p> <p><math>g_{\text{reaction}} = -\mu</math></p> <p><math>\mu = [\mu_1, \mu_2]^T</math></p>
--

图 2 狄利克雷边界条件

基于 2.4 中建立的水热耦合方程，对文献[12]中的室内水分迁移试验进行数值模拟，通过试验结果和数值模拟结果的对比，来验证模型的有效性。计算所需土体参数取值见表 1。

表 1 土体参数

参数	取值	单位	含义
$a$	-2	1	含冰率系数
$T_f$	-0.3	°C	冻结温度
$L$	334.56	kJ/kg	相变潜热
$\rho_s$	2700	kg/m <sup>3</sup>	土体密度
$C_i$	1874	kJ/(m <sup>3</sup> ·K)	冰体积热容
$C_f$	2160	kJ/(m <sup>3</sup> ·K)	土体积热容
$\lambda_s$	1.2	W/(m·K)	土导热系数
$\lambda_w$	0.58	W/(m·K)	水导热系数
$\lambda_i$	2.22	W/(m·K)	冰导热系数

模拟工况为：将一个高度为 10 cm，半径为 3 cm 的圆柱土样放置在 0.7 °C 的环境中恒温 24 h，土柱顶面温度维持在 -2.3 °C，土样底部恒温 0.7 °C 且侧面绝热。底部采用无压补水的方式，初始含水量为 0.189，由于采用底部补水方式，故未冻区的含水量始终保持在 0.189。其中模型计算时间为 120 h，计算步长为 0.5 h。

#### 3.2 温度场数值模拟

图 3 给出的是土柱在不同高度处温度随时间变化的试验值与数值模拟结果。模拟结果与试验结果基本接近，在 1.5cm 处和 3.5cm 处误差相对较大，最大温度误差极值在 0.3°C 以内。在初始冻结的 10 小时之内，温度变化剧烈；随后温度变化缓慢，当冻结 30h 之后，温度基本保持不变。

图 4 是土柱在不同时刻的温度沿土柱高度分布的试验值与数值模拟结果。很显然温度从下到上是逐渐变低的，并且随着冻结时间的增长，温度沿土柱高度的变化趋势呈线性规律。除此之外，在冻结区存在大的温度梯度，曲线斜率较大；未冻区曲线较为平缓，温度梯度较小。这主要是由于不同的热学参数和冰水相变潜热所致。

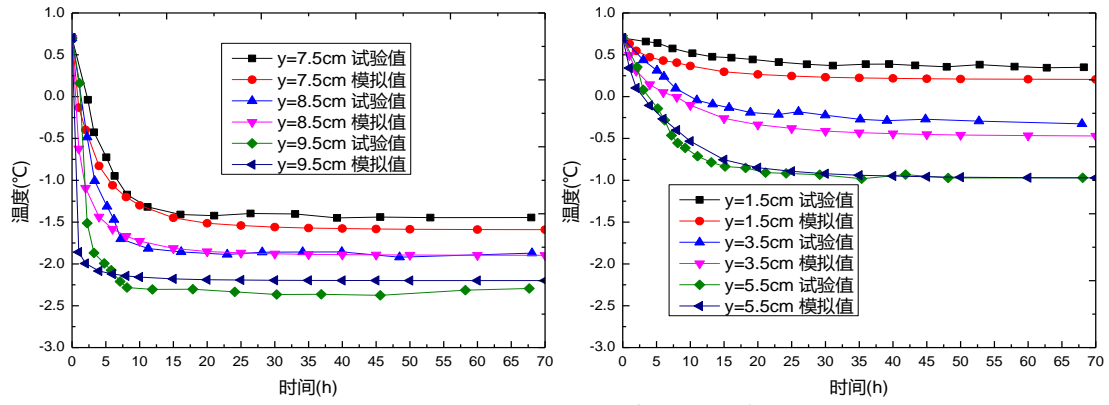


图3 土柱不同位置处温度随时间变化

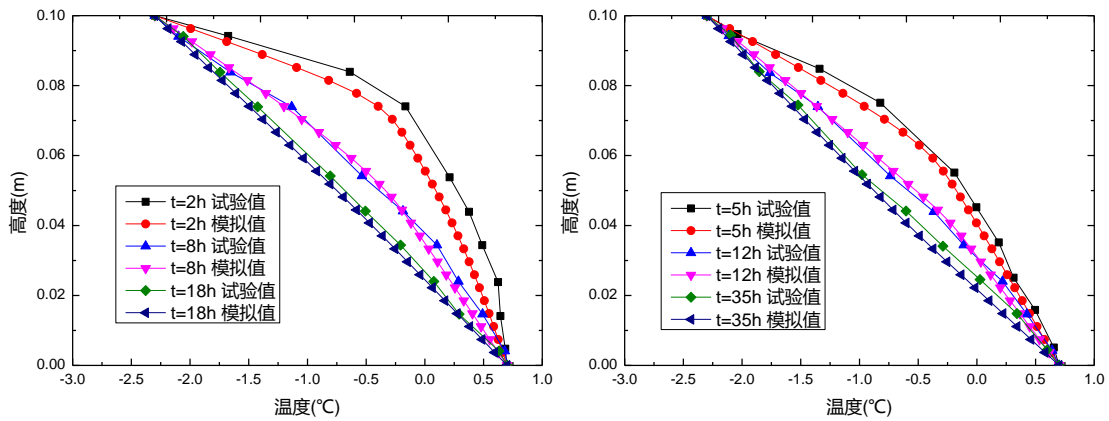


图4 不同时刻温度随高度的变化

### 3.3 水分场数值模拟

图5是冻结120h后土体内含水量沿土柱高度分布情况的试验值与模拟值对比。试验值与模拟值基本接近，但冻结区顶部差异较大，这是在试验时并没有将冻土恒温到 $0.7^{\circ}\text{C}$ ，而是略高于该值，导致早期有一部分水分迁移到冻结区。除此之外，模拟值的最大含水率位置比试验值的位置略低，这是由于在模拟过程中假设土体发生相变的温度为 $-0.3^{\circ}\text{C}$ ，而实际土体发生相变的温度可能略低于 $-0.3^{\circ}\text{C}$ 。可见温度场对水分场的分布有着很大的影响，比较图4和图5，可以发现相变转换温度的位置十分接近最大总含水量的位置。

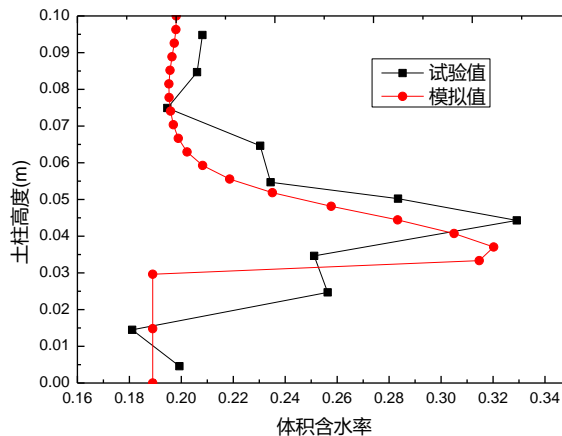


图5 含水量随高度的变化 (120h)

## 4 模型试验

模型试验在低温试验室进行。试验室最低温度可达 $-35^{\circ}\text{C}$ ，温度过程自动可调。室内模型试验箱体尺寸（长×宽×高） $4\text{m}\times 1.36\text{m}\times 1.44\text{m}$ 。试验数据采集系统包括DT515/615系列数据采



冻胀量。随着温度的继续升高，冻土层变薄，并存在于模型的中部和底部，如图 11 所示。不久之后冰完全融化，这也预示着融沉现象即将发生。

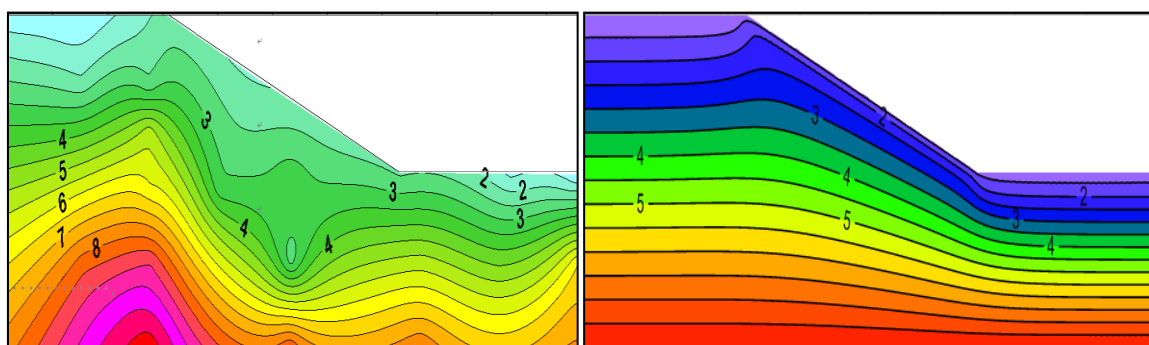


图 9 开始降温时模型温度场分布试验值与模拟值(单位:°C)

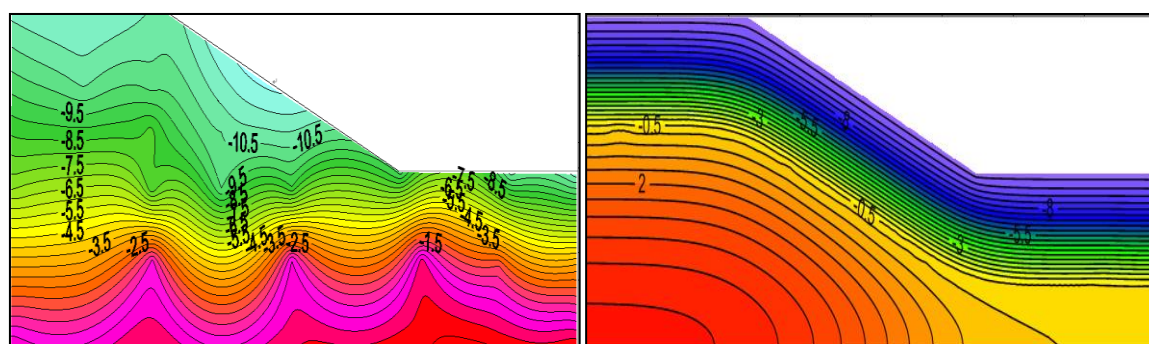


图 10 最大冻胀量时模型温度场分布试验值与模拟值(单位:°C)

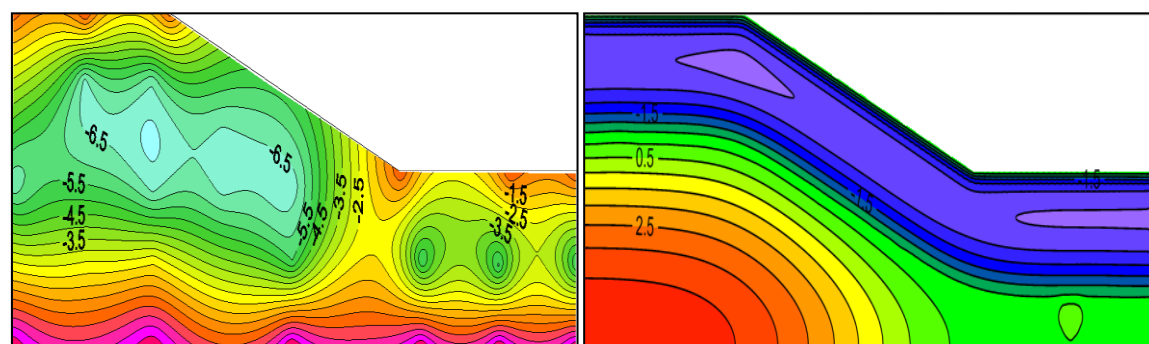


图 11 开始融化时模型温度场分布试验值与模拟值(单位:°C)

## 5 结论

为了理解水热耦合的复杂过程，本文建立了一个简单的模型，并与土柱试验结果对比，证明了其有效性。接着完成了在一次冻融循环作用下的模型试验，然后用有限元对其温度场进行模拟，结果与试验结果吻合较好。由全文可以得到以下结论：

- 1 基于水分迁移的理论，在冻结阶段，冻结缘处的总含水量要大于其他区域的总含水量；而当开始融化时，过多的水分会削弱土体的强度，也会影响渠道边坡稳定性。
- 2 从模型试验中可知，由于相变潜热的存在，含水量对温度场的分布有着显著的影响。模拟的最大冻深和最大冻胀量都与试验值接近，其结果对寒区渠道工程的建设提供了一个参考。

## 参考文献



- [1] Harlan, R. L., 1973. Analysis of coupled heat-fluid transport in partially frozen soil. *Water Resour. Res.*, 9(5), 1314–1322.
- [2] Tan, X. J., Chen, W. Z., 2011. Water flow and heat transport including ice/water phase change in porous media: Numerical simulation and application. *Cold Reg. Sci. Technol.*, 68, 74–84.
- [3] Zhou, J. Z., Li, D. Q., 2012. Numerical analysis of coupled water, heat and stress in saturated freezing soil. *Cold Reg. Sci. Technol.*, 72, 43–49.
- [4] Miller, R. D., 1972. Freezing and heaving of saturated and unsaturated soils. *Highway Research Record*, 393, 1–11.
- [5] Gilpin, R. R., 1980. A model for the prediction of ice lensing and frost heave in soils. *Water Resour. Res.*, 16, 918–930.
- [6] Zhou, J. Z., Wei, C. F., 2014. A moving-pump model for water migration in unsaturated freezing soil. *Cold Reg. Sci. Technol.*, 104–105, 14–22.
- [7] Zhang, Z. X., Kushwaha, R. L., 1998. Modeling soil freeze-thaw and ice effect on canal bank. *Can Geotech J.*, 35, 655–665.
- [8] Zhong, H., Wang, X. F., Zhang, B., 2013. Research on hydraulic soil slope frost heaving damage model test. *Appl. Mech. Mater.*, 256–259, 422–426
- [9] Li, S. Y., Zhang, M. Y., 2015. Experimental and numerical investigations on frost damage mechanism of a canal in cold regions. *Cold Reg. Sci. Technol.*, 116, 1–11.
- [10] Taylor, G. S., Luthin, J. N., 1978. A model for coupled heat and moisture transfer during soil freezing. *Can Geotech J.*, 15(4), 548–555.
- [11] COMSOL Multiphysics User's Guide (Version: 5.4). Stockholm: COMSOL AB, 2018.

